

Лэ Ван Хань

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЯ И ОЦЕНКИ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Аннотация. Цель работы – на основе векторной функции Ляпунова и принципа сравнения построить алгоритмы и сформировать системы сравнения для непрерывных и дискретных линейных уравнений, описывающие сложные динамические системы. Изложены методы декомпозиции сложных динамических систем на подсистемы с линейными связями. С помощью таких методов процесс исследования сложных систем был упрощен. В ходе исследования также были разработаны подробные алгоритмы построения системы сравнения для непрерывных и дискретных объектов сложных систем. На основе теоремы Н.Н. Красовского рассмотрены оценки векторной функции Ляпунова и сформированы условия устойчивости сложных динамических систем. Разработанные алгоритмы поддерживают вычисление векторной функции Ляпунова и построение системы сравнения для непрерывных и дискретных объектов сложных динамических систем. Это является основой для оценки устойчивости системы и влияния линейных связей на устойчивость системы. Кроме этого, на основе этих алгоритмов (децентрализации сложных систем и построения системы сравнения) реализован синтез управления сложных динамических систем. В работе использованы алгоритмы для анализа устойчивости электроэнергетического объединения.

Ключевые слова: алгоритмы построения системы сравнения, декомпозиции системы, векторные функции Ляпунова, принцип сравнения, устойчивость динамических систем.

Le Van Khanh

A LGORITHMS FOR CONSTRUCTING A SYSTEM OF COMPARISON ANDESTIMATES OF THE LYAPUNOV VECTOR FUNCTION

Abstract. The purpose of research-based on the Lyapunov vector function and the comparison principle, algorithms were developed and comparison systems were formed for continuous and discrete linear equations that describe complex dynamic systems. In this work, methods for the decomposition of complex dynamic systems into subsystems with linear connections were presented. With the help of such methods, the process of studying complex systems was simplified. In the course of the research, detailed algorithms for constructing a comparison system for continuous and discrete objects of complex systems were also developed. Then, based on N.N. Krasovskiy, an assessment of the Lyapunov vector function was considered and conditions for the stability of complex dynamical systems were formed. The developed algorithms support the calculation of the Lyapunov vector function and the construction of a comparison system for continuous and discrete objects of complex dynamic systems. This is the basis for assessing the stability of the system and the influence of linear relationships on the stability of the system. In addition, on the basis of these algorithms (decentralization of complex systems and the construction of a comparison system), the synthesis of control of complex dynamic systems is implemented. In this work, algorithms have been used to analyze the sustainability of an electric power pool.

Keywords: comparison system construction algorithms, system decomposition, Lyapunov vector functions, comparison principle, stability of dynamical systems.

Лэ Ван Хань

аспирант, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург. Сфера научных интересов: системный анализ, управление и обработка информации.

Автор трех опубликованных научных работ.

Электронный адрес: le3.vh@edu.spbstu.ru

Введение

На практике исследование и оценка устойчивости сложных динамических систем, содержащих линейные связи между процессами, были бы очень сложны. Декомпозиции этих систем на подсистемы с линейными связями упрощают исследование и оценку сложных систем. На основе метода векторной функции Ляпунова и принципа сравнения Матрасова построены системы сравнения с агрегирующей матрицей, а затем оценены устойчивость сложных систем через систему сравнения.

В работах [8–12] построены оценки векторной функции Ляпунова, система сравнения, условия устойчивости для непрерывных линейных систем, даны понятия и оценки, но конкретного алгоритма не разработано.

В настоящей статье построены подробные алгоритмы для получения системы сравнения и оценки условий устойчивости для непрерывных и дискретных объектов сложных систем. Эти алгоритмы являются основой анализа влияния линейных связей на устойчивость стационарных динамических систем и дальнейших исследований нелинейных и нестационарных динамических систем.

Декомпозиция непрерывных и дискретных систем

Системы состоят из множества подсистем, связанных между собой линейными связями. Непосредственное исследование таких систем очень сложно. Для упрощения процесса исследования разобьем исходную систему на подсистемы с соответствующими линейными связями, покажем процедуру децентрализации сложных систем на более простые подсистемы и дадим оценку на основе векторной функции Ляпунова. При этом построим новую систему сравнения, более простую, чем исходная, и на основе свойств этой системы определим свойства исходной системы.

В линейном случае поведение сложной динамической системы моделируется непрерывным и дискретным объектами:

непрерывные системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0; \quad (1a)$$

дискретные системы

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1б)$$

где k – дискретное время; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих воздействий; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрицы параметров системы.

На основе структурной или формальной декомпозиции исходная система представляется в виде совокупности взаимодействующих подсистем:

непрерывная система

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= A_i x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j + B_i u_i, \\ x_i(0) &= x_{i0}, \\ h_i &= \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, N};\end{aligned}\tag{2a}$$

дискретная система

$$\begin{aligned}x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j(k) + \\ &+ B_i u_i(k), \quad x_i(0) = x_{i0}, \\ h_i(x_i(k)) &= \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j(k), \quad i = \overline{1, N},\end{aligned}\tag{2б}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ – вектор состояния i -й подсистемы; h_i – вектор управляющих воздействий i -й подсистемы; A_{ij} – матрица связей; $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$ – матрица управлений i -й подсистемы,

$$\sum_{i=1}^N n_i = n, \quad \sum_{i=1}^N m_i = m.$$

Диагональные матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ определяют диагональные подсистемы N_i , а слагаемые h_i (или $h_i(x_i(k))$) в (2а)–(2б) – влияние подсистем с координатами x_j на координаты x_i и \dot{x}_i подсистемы N_i (или влияние подсистем с координатами $x_j(k)$ на координаты $x_i(k)$ и $x_i(k+1)$ подсистемы N_i).

Принцип сравнения для непрерывных и дискретных систем

Идея принципа сравнения при анализе сложных динамических систем существует давно. Описать основную идею принципа сравнения можно следующим образом. Вместо точной математической модели S сложной системы строится более простая математическая модель, которая может быть совершенно не похожа на точную, то есть не используется принцип подобия. В работах [1–3] конкретизирован принцип сравнения на основе теории векторной функций Ляпунова.

Рассмотрим принцип сравнения применительно к непрерывным и дискретным системам. Представим уравнения *непрерывных* и *дискретных* систем без воздействий и исследуем их на устойчивость:

непрерывные системы

$$\dot{x} = F(x);\tag{3а}$$

дискретные системы

$$x(k+1) = F(x(k)).\tag{3б}$$

Сформируем векторную функцию Ляпунова:

Алгоритмы построения системы сравнения и оценки векторной функции Ляпунова

непрерывные системы

$$V(x) = (V_1(x_1), \dots, V_N(x_N));$$

дискретные системы

$$V(x(k)) = (V_1(x_1(k)), \dots, V_N(x_N(k))).$$

С компонентами $V_i(x_i) = x_i^T H_i x_i$ и их полные производные (для непрерывных систем), $V_i(x_i(k)) = x_i^T(k) H_i x_i(k)$ и разностные уравнения (для дискретных систем) в силу исходной системы (3а)–(3б):

непрерывные системы

$$\dot{V}_i(x_i) = [\text{grad}_{x_i} V_i(x_i)]^T \dot{x}_i; \quad (4a)$$

дискретные системы

$$\Delta V_i(x_i(k)) = V_i(x_i(k+1)) - V_i(x_i(k)), \quad (4б)$$

где $H_i = H_i^T > 0$.

Эффективность подхода, основанного на принципе сравнения, связана с возможностью построения векторной функции $f(V(x))$ и $f(V(x(k)))$ такой, что выполняется неравенство:

непрерывные системы

$$\dot{V}(x) \leq f(V(x)); \quad (5a)$$

дискретные системы

$$V(x(k+1)) \leq f(V(x(k))). \quad (5б)$$

От неравенств (5а)–(5б) можно перейти к дифференциальным уравнениям систем сравнения:

непрерывные системы

$$\dot{z} = f(z); \quad (6a)$$

дискретные системы

$$z(x(k+1)) = f(z(x(k))), \quad (6б)$$

где $z \in \mathbb{R}^N$, $z(0) = z_0$ – вектор состояния системы сравнения.

Для упрощения исследования устойчивости системы (3а)–(3б) необходимо провести исследование устойчивости системы сравнения (6а)–(6б).

Структура оценок производных функций Ляпунова

Пусть подсистема, соединенная с другими подсистемами посредством линейных связей, имеет следующий вид:

непрерывные системы

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j + B_i u_i; \quad (7a)$$

дискретные системы

$$x_i(k+1) = A_i x_i(t) + B_i u_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j(k), \quad (76)$$

где $i = \overline{1, N}$, $\sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j$, $\sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j(k)$ – линейные связи подсистем.

Для линейной стационарной системы (7а)–(7б) скалярные функции Ляпунова $V_i(x_i)$ и $V_i(x_i(k))$ диагональных подсистем выбираются в виде квадратичной формы:

непрерывные системы

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j + B_i u_i; \quad (8a)$$

дискретные системы

$$V_i(x_i(k)) = x_i^T(k) H_i x_i(k), \quad (86)$$

где $H_i = H_i^T \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ – положительно определенная матрица как решение матричного уравнения Ляпунова [3]:

непрерывные системы

$$A_i^T H_i + H_i A_i + Q_i = 0, \quad (9a)$$

дискретные системы

$$A_i^T H_i A_i - H_i + Q_i = 0, \quad (96)$$

где $Q_i = Q_i^T \geq 0 \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$.

Вычислим полную производную $\dot{V}_i(x_i)$ и приращение $\Delta V_i(x_i(k))$ в силу уравнения (7а)–(7б):

дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_i) &= (\dot{x}_i^T H_i x_i + x_i^T H_i \dot{x}_i) \\ &= x_i^T A_i^T H_i x_i + x_i^T H_i A_i x_i + 2u_i^T B_i^T H_i x_i; \end{aligned}$$

разностные уравнения

$$\begin{aligned} \Delta V_i(x(k)) &= (x_i^T(k+1) H_i x_i(k+1) - x_i^T(k) H_i x_i(k)), \\ &= x_i^T(k) A_i^T H_i A_i x_i(k) - x_i^T(k) H_i x_i(k) + 2u_i^T(k) B_i^T H_i A_i x_i(k) + u_i^T(k) B_i^T H_i B_i u_i(k). \end{aligned}$$

При экспоненциальной устойчивости нулевого решения изолированных подсистем (непрерывные) и автономных конечно-разностных уравнений (дискретные) допускается обращение в соответствии с результатами теоремы Н.Н. Красовского, и у каждой подсистемы существует скалярная функция Ляпунова:

непрерывные системы

$$c_{1i}^2 \|x_i\|^2 \leq V_i(x_i) \leq c_{2i}^2 \|x_i\|^2; \dot{V}_i(x_i) \leq -c_{3i}^2 \|x_i\|^2; \|\text{grad}_{x_i} V_i(x_i)\| \leq c_{4i}^2 \|x_i\|^2 \quad (10a)$$

дискретные системы

$$c_{1i}^2 \|x_i(k)\|^2 \leq V_i(x(k)) \leq c_{2i}^2 \|x_i(k)\|^2; \Delta V_i(x(k)) \leq -c_{3i}^2 \|x_i(k)\|^2 \quad (106)$$

где $c_{ki} > 0, k=1,2,3,4$.

Неравенства (10а)–(10б) являются оценкой производных функций Ляпунова. От (10а)–(10б) можно построить неравенства (5а)–(5б).

Построение систем сравнения

Для непрерывных систем: построение элементов агрегированной системы. При внешних воздействиях вводится функция Ляпунова в виде $v_i(x) = (V_i(x_i))^{1/2} = (x_i^T H_i x_i)^{1/2}$ [2].

Для компонентов $v_i(x)$ векторной функции Ляпунова имеют в силу оценки Красовского:

$$c_{1i} \|x_i\| \leq v_i \leq c_{2i} \|x_i\|; \dot{v}_i \leq -\eta_i \|x_i\|; \left\| \text{grad}_{x_i} v_i \right\| \leq \mu_i \|x_i\| \tag{11a}$$

Параметры c_{li}, η_i, M_i определяются следующим образом:

$$c_{1i} = \lambda_m^{1/2}(H_i); c_{2i} = \lambda_M^{1/2}(H_i);$$

$$\eta_i = \frac{c_{3i}^2}{2c_{2i}} = \frac{\lambda_m(Q_{ii})}{2\lambda_M^{1/2}(H_i)}; M_i = \frac{c_{4i}^2}{2c_{1i}} = \frac{\lambda_M(H_i)}{2\lambda_m^{1/2}(H_i)},$$

где $c_{li} > 0, l=1,2,3,4$; $\lambda_m(\Delta), \lambda_M(\Delta)$ – соответственно, минимальное и максимальное собственные числа матрицы Δ .

Вычисляя полную производную функции $v_i(x_i)$ в силу уравнения (2а), определяющего поведение взаимосвязанных подсистем, имеем

$$\dot{v}_i(x_i) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}, A_i x_i \right) + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}, B_i u_i \right) + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j \right).$$

В силу первого и третьего неравенства Н.Н. Красовского оценки компонентов $\dot{v}_i(x_i)$ производной функции Ляпунова примут вид

$$\dot{v}_i(x_i) \leq -\frac{\eta_{3i}^2}{2c_{2i}^2} v_i(x_i) + \frac{c_{4i}^2}{2c_{1i}} \lambda_M^{1/2}(B_i^T B_i) |u_i| + \frac{c_{4i}^2}{2c_{1i} c_{1i}} \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_M^{1/2}(A_{ij}^T A_{ij}) v_j(x_j). \tag{12a}$$

Векторная функция Ляпунова $v(x) = (v_1(x_1), \dots, v_N(x_N))^T$ с компонентами в виде скалярных функций, последнее неравенство (11а) можно представить в векторной форме:

$$\dot{v}(x) \leq Wv(x) + \Gamma|u|, \tag{13a}$$

где $\Gamma \in \mathbb{R}^N$ – агрегирующая матрица.

Тогда система сравнения с агрегирующей матрицей имеет вид

$$\dot{z} = Wz + \Gamma u, z(0) = z_0 \tag{14a}$$

где $z \in \mathbb{R}^N, W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ – вектор состояния агрегированной системы.

Из (12а) получены элементы матриц W и векторов Γ :

$$W = \{w_{ij}\}_1^N = \begin{cases} w_{ii} = -\frac{\lambda_m(Q_i)}{2\lambda_M(H_i)} \\ w_{ij} = \frac{\lambda_M(H_i)\lambda_M^{1/2}(A_{ij}^T A_{ij})}{\lambda_m^{1/2}(H_i)\lambda_m^{1/2}(H_j)} \end{cases} \quad (15a)$$

$$\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}_1^N,$$

$$\gamma_i = \left[\lambda_M(H_i)\lambda_M^{1/2}(B_i^T B_i) \right] \lambda_m^{-1/2}(H_i).$$

Для дискретных систем: построение элементов агрегированной системы. Функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V_i(x(k)) = x_i^T(k) H_i x_i(k) \quad (116)$$

удовлетворяет требованиям (106) с параметрами $c_{1i} = \lambda_m^{1/2}(H_i)$, $c_{2i} = \lambda_M^{1/2}(H_i)$. Для определения c_{3i} вычислим конечную разность функции Ляпунова $V_i(x_i(k))$ вдоль траекторий подсистем (76), замкнутых децентрализованными регуляторами:

$$\begin{aligned} \Delta V_i(x_i(k)) &= V_i(x_i(k+1)) - V_i(x_i(k)) \\ &= x_i^T(k+1) H_i x_i(k+1) - x_i^T(k) H_i x_i(k) \\ &= x_i^T(k) (A_i^T H_i A_i) x_i(k) - x_i^T(k) H_i x_i(k) \\ &\quad + u_i^T(k) B_i^T H_i B_i u_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N x_j^T(k) A_{ij}^T H_i A_{ij} x_j(k) \\ &\quad + 2x_i^T(k) A_i^T H_i \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j(k) + 2x_i^T(k) A_i^T H_i B_i u_i(k) \\ &\quad + 2u_i^T(k) B_i^T H_i \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j(k). \end{aligned} \quad (126)$$

Отсюда с учетом оценок, справедливых для матриц Δ , Ω и векторов a , b с согласованными размерностями

$$2a^T \Delta^T \Omega b \leq a^T \Delta^T \Delta a + b^T \Omega^T \Omega b$$

$$\sum_{i=1}^N 2a^T \Delta^T \Omega_i b_i \leq N a^T \Delta^T \Delta a + \sum_{i=1}^N b_i^T \Omega_i^T \Omega_i b_i.$$

Тогда функции $V_i(x_i(k))$ удовлетворяют конечно-разностным неравенствам:

$$\begin{aligned} V_i(x_i(k+1)) &\leq x_i^T(k) A_i^T (N E_{n_i} + H_i) A_i x_i(k) \\ &\quad + u_i^T(k) B_i^T (H_i + N H_i^2) B_i u_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N x_j^T(k) A_{ij}^T (N E_{n_i} + H_i + H_i^2) A_{ij} x_j(k). \end{aligned}$$

Перейдя в последнем неравенстве к евклидовой норме векторов x_i, x_j, u_i и используя известные экстремальные свойства отношения Релея $\max(\langle x, Dx \rangle / \langle x, x \rangle) = \lambda_M(D)$, имеем

Алгоритмы построения системы сравнения и оценки векторной функции Ляпунова

$$V_i(x_i(k+1)) \leq \lambda_M \left[A_i^T (NE_{n_i} + H_i) A_i \right] \|x_i(k)\|^2 + \lambda_M \left[B_i^T (H_i + NH_i^2) B_i \right] \|u_i(k)\|^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_M \left[A_{ij}^T (NE_{n_i} + H_i + H_i^2) A_{ij} \right] \|x_j(k)\|^2;$$

получаем мажоранту для функции Ляпунова:

$$V_i(x_i(k+1)) \leq \frac{\lambda_M \left[A_i^T (NE_{n_i} + H_i) A_i \right]}{\lambda_m(H_i)} V_i(x_i(k)) + \lambda_M \left[B_i^T (H_i + NH_i^2) B_i \right] \|u_i(k)\|^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\lambda_M \left[A_{ij}^T (NE_{n_i} + H_i + H_i^2) A_{ij} \right]}{\lambda_m(H_j)} V_j(x_j(k)).$$

Также при внешних воздействиях вводится функция Ляпунова в виде [2]

$$v_i(x(k)) = (V_i(x_i(k)))^{1/2} = (x_i^T(k) H_i x_i(k))^{1/2}.$$

В силу последнего неравенства для функции $v_i(x(k+1))$ имеет место следующая оценка (13б):

$$v_i(x_i(k+1)) \leq \frac{\lambda_M^{1/2} \left[A_i^T (NE_{n_i} + H_i) A_i \right]}{\lambda_m^{1/2}(H_i)} v_i(x_i(k)) + \lambda_M^{1/2} \left[B_i^T (H_i + NH_i^2) B_i \right] u_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\lambda_M^{1/2} \left[A_{ij}^T (NE_{n_i} + H_i + H_i^2) A_{ij} \right]}{\lambda_m^{1/2}(H_j)} v_j(x_j(k)).$$

В силу векторной функции Ляпунова

$$v(x(k)) = (v_1(x_1(k)), \dots, v_N(x_N(k)))^T$$

с компонентами в виде скалярных функций последнее неравенство (13б) можно представить в векторной форме:

$$v(x(k+1)) \leq Wv(x(k)) + \Gamma u(k),$$

где $\Gamma \in \mathbb{R}^N$, $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ – агрегирующая матрица.

Система сравнения с агрегирующей матрицей имеет вид

$$z(x(k+1)) = Wz(x(k)) + \Gamma u(k), \tag{146}$$

$$z(x(0)) = z_0,$$

где $z \in \mathbb{R}^N$ – вектор состояния агрегированной системы.

Из (13б) получены элементы матриц W и векторов Γ :

$$W = \{w_{ij}\}_1^N = \begin{cases} w_{ii} = \frac{\lambda_M^{1/2} [A_i^T (NE_{n_i} + H_i) A_i]}{\lambda_m^{1/2} (H_i)} \\ w_{ij} = \frac{\lambda_M^{1/2} [A_{ij}^T (NE_{n_i} + H_i + H_i^2) A_{ij}]}{\lambda_m^{1/2} (H_j)} \end{cases} \quad (156)$$

$$\Gamma = \text{diag} \{ \gamma_i \}_1^N,$$

$$\gamma_i = \lambda_M^{1/2} [B_i^T (H_i + NH_i^2) B_i], \quad i = \overline{1, N}.$$

Условия устойчивости агрегированной модели

Для упрощения исследования устойчивости исходной сложной системы проведем исследования устойчивости системы сравнения, которая имеет меньшую размерность. Устойчивость системы сравнения можно легко проверить на основе применения критериев Гурвица.

Системы сравнения (14а)–(14б) имеют агрегатные матрицы W с недиагональными элементами будут неотрицательными ($w_{ij} > 0$), если матрица W – матрица типа М (матрица Метцлера). Агрегатные матрицы W с отрицательными диагональными и неотрицательными недиагональными элементами обязательны для устойчивости, но этого недостаточно: требуется также соблюдение условий квазидоминирования диагонали. Для синтеза управляющих законов и устройств следует пользоваться условиями Севастьянова – Котелянского [3].

М-матрица A размерности $N \times N$ устойчива в том и только в том случае, если все ее четные последовательные главные миноры положительны, а нечетные – отрицательны:

$$(-1)^k \begin{vmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k1} & \cdots & w_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (16)$$

Алгоритм построения системы сравнения

По результатам приведенного выше анализа можно предложить алгоритм построения системы сравнения.

Шаг 1. Построить подсистему, соединенную с другими подсистемами посредством линейных связей:

непрерывные системы

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j + B_i u_i;$$

дискретные системы

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j(k) + B_i u_i(k).$$

Шаг 2. Построить уравнения Риккати и решить уравнения:

непрерывные системы

$$A_i^T H_i + H_i A_i + Q_i = 0;$$

дискретные системы

$$A_i^T H_i A_i - H_i + Q_i = 0.$$

Из этого шага нахождения матриц H_i .

Шаг 3. Вычислить параметры c_{ki}, β_i, μ_i оценки векторной функции Ляпунова, $i = \overline{1, N}$:
непрерывные системы

$$c_{1i} = \lambda_m^{1/2}(H_i); \quad c_{2i} = \lambda_M^{1/2}(H_i);$$

$$\beta_i = \frac{c_{3i}^2}{2c_{2i}} = \frac{\lambda_m(Q_i)}{2\lambda_M^{1/2}(H_i)}; \quad \mu_i = \frac{c_{4i}^2}{2c_{1i}} = \frac{\lambda_M(H_i)}{2\lambda_m^{1/2}(H_i)};$$

оценки векторной функции Ляпунова

$$c_{1i} \|x_i\| \leq v_i \leq c_{2i} \|x_i\|; \quad \dot{v}_i \leq -\beta_i \|x_i\|; \quad \|\text{grad}_{x_i} v_i\| \leq \mu_i \|x_i\|;$$

дискретные системы

Оценки векторной функции Ляпунова

$$c_{1i} \|x_i(k)\| \leq v_i(x(k)) \leq c_{2i} \|x_i(k)\|; \quad c_{1i} = \lambda_m^{1/2}(H_i), \quad c_{2i} = \lambda_M^{1/2}(H_i);$$

$$v_i(x_i(k+1)) \leq \frac{\lambda_M^{1/2} \left[A_i^T (NE_{n_i} + H_i) A_i \right]}{\lambda_m^{1/2}(H_i)} v_i(x_i(k)) +$$

$$+ \lambda_M^{1/2} \left[B_i^T (H_i + NH_i^2) B_i \right] \bar{u}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\lambda_M^{1/2} \left[A_{ij}^T (NE_{n_i} + H_i + H_i^2) A_{ij} \right]}{\lambda_m^{1/2}(H_j)} v_j(x_j(k)).$$

Шаг 4. Построение системы сравнения с агрегирующей матрицей:
непрерывные системы

$$\dot{z} = Wz + \Gamma u, \quad z(0) = z_0;$$

$$W = \{w_{ij}\}_1^N = \begin{cases} w_{ii} = -\frac{\lambda_m(Q_i)}{2\lambda_M(H_i)}, \\ w_{ij} = \frac{\lambda_M(H_i)\lambda_M^{1/2}(A_{ij}^T A_{ij})}{\lambda_m^{1/2}(H_i)\lambda_m^{1/2}(H_j)}, \end{cases}$$

$$\bar{A} = \text{diag}\{\gamma_i\}_1^N,$$

дискретные системы

$$\gamma_i = \left[\lambda_M(H_i)\lambda_M^{1/2}(B_i^T B_i) \right] \lambda_m^{-1/2}(H_i);$$

$$z(x(k+1)) = Wz(x(k)) + \Gamma u(k), \quad z(x(0)) = z_0;$$

$$W = \{w_{ij}\}_1^N = \begin{cases} w_{ii} = \frac{\lambda_M^{1/2} \left[A_i^T (NE_{n_i} + H_i) A_i \right]}{\lambda_m^{1/2}(H_i)}, \\ w_{ij} = \frac{\lambda_M^{1/2} \left[A_{ij}^T (NE_{n_i} + H_i + H_i^2) A_{ij} \right]}{\lambda_m^{1/2}(H_j)}, \end{cases}$$

$$\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i\}_1^N, \gamma_i = \lambda_M^{1/2} \left[B_i^T (H_i + NH_i^2) B_i \right].$$

Шаг 5. Условия устойчивости системы сравнения.

Вычислены условия Севастьянова – Котелянского:

$$(-1)^k \begin{vmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k1} & \cdots & w_{kk} \end{vmatrix} > 0, k = \overline{1, N}.$$

Применение алгоритма для анализа устойчивости ЭЭО

В линеаризованной форме исходные уравнения электромеханических процессов i -й ЭС имеют вид [5]

$$\begin{aligned} p_i - \mu_i &= T_{ai}^2 \dot{\omega}_i + T_{yi} \omega_i + \\ &+ \sum_{j=1, j \neq i}^n \rho_{ij} (\varphi_i - \varphi_j), \\ T_{Ii} \dot{p}_i + p_i &= q_i, \\ T_{ci} \dot{q}_i + q_i &= -k_{oi} \omega_i + \sigma_i, \\ T_{Ii} \dot{\sigma}_i + \sigma_i &= u_i, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\varphi_i, \omega_i, \mu_i, \sigma_i, p_i, q_i, u_i$ – отклонения, соответственно, углов, частот, нагрузки, сигналов регуляторов, мощностей, перетоков полиниями управления i -й ЭС; $T_{ai}, T_{yi}, T_{Ii}, T_{ci}, T_{Ii}, k_{oi}, \rho_{ij}$ – параметры ЭС.

Система уравнений электромеханических процессов энергообъединения с учетом регуляторов может быть представлена в форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= \omega_i, \\ \dot{\omega}_i &= -\frac{1}{T_{ai}} \sum_{j=1, j \neq i}^n \sigma_{ij} (\varphi_i - \varphi_j) - \frac{T_{yi}}{T_{ai}^2} \omega_i + \frac{1}{T_{ai}^2} p_i - \frac{1}{T_{ai}^2} \mu_i, \\ \dot{p}_i &= -\frac{1}{T_{Ii}} p_i + \frac{1}{T_{Ii}} q_i, \\ \dot{q}_i &= -\frac{k_{oi}}{T_{ci}} \omega_i - \frac{1}{T_{ci}} q_i + \frac{1}{T_{ci}} \sigma_i, \\ \dot{\sigma}_i &= -\frac{1}{T_{Ii}} \sigma_i + \frac{1}{T_{Ii}} u_i. \end{aligned} \tag{18}$$

Пусть векторы состояний $x = [\varphi, \omega, p, q, \sigma]^T$ состоят из физических координат ЭЭО вектора управлений $U = [u, \mu]^T$. Эти координаты определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_1, \dots, \varphi_n), \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \\ p &= (p_1, \dots, p_n), \\ q &= (q_1, \dots, q_n), \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n), \\ u &= (u_1, \dots, u_n), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n). \end{aligned}$$

Тогда уравнения электромеханических процессов (17), (18) можно записать в форме Коши:

Алгоритмы построения системы сравнения и оценки векторной функции Ляпунова

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{19}$$

где $A = (A_{lm})$, $B = (B_{rs})$ – блочные матрицы, причем $l, r, m = 1, 2, 3, 4, 5$, $s = 1, 2$, а клетки A_{lm}, B_{rs} имеют размер $(n \times n)$.

Декомпозиция моделей (19) по форме (2), и уравнения ЭЭО имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= [\dot{\varphi}_i, \dot{\omega}_i, \dot{p}_i, \dot{q}_i, \dot{\sigma}_i]^T = \\ & A_i x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij} x_j + B_i (u_i, \mu_i)^T, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{T_{ai}^2} \sum_{j=1, j \neq i}^n \rho_{ij} & -\frac{T_{yi}}{T_{ai}^2} & \frac{1}{T_{ai}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{Ii}} & \frac{1}{T_{Ii}} & 0 \\ 0 & -\frac{k_{\omega i}}{T_{ci}} & 0 & -\frac{1}{T_{ci}} & \frac{1}{T_{ci}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{Ii}} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_{ij}}{T_{aj}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_{ai}^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{Ei}} & 0 \end{bmatrix}.$$

В работе исследовался комплекс математических моделей ЭЭО, один из вариантов которых показан на Рисунке 1.

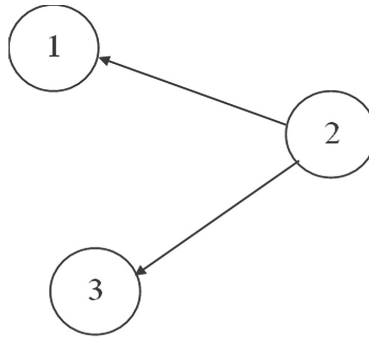


Рисунок 1. Схема исследуемого энергообъединения

Таблица

Параметры энергосистемы

i	T_{ai}	T_{yi}	T_{Ii}	T_{ci}	$k_{\omega i}$	ρ_{ij}
1	0,02	0,027	1,5	0,5	0,017	0,02
2	0,017	0,025	1,5	0,5	0,032	0
3	0,02	0,025	1,5	0,5	0,016	0,04

С помощью программы МАТЛАБ исследованы устойчивости ЭЭО. Вычислены параметры для оценок векторной функции Ляпунова:

$$c_1 = (0,0197 \quad 0,0168 \quad 0,0197); \quad c_2 = (1,4704 \quad 1,4695 \quad 1,4701);$$

$$c_3 = (1 \quad 1 \quad 1); \quad c_4 = (2,0794 \quad 2,0782 \quad 2,0790);$$

$$\eta = (25,3441 \quad 29,7852 \quad 25,3187); \quad \mu = (109,5821 \quad 128,6328 \quad 109,4275).$$

Тогда

для ЭС-1

$$0,0197 \|x_1\| \leq v_1(x_1) \leq 1,4704 \|x_1\|,$$

$$\dot{v}_1(x_1) \leq -25,3441 \|x_1\|; \quad \|\text{grad}_{x_1} v_1(x_1)\| \leq 109,5821 \|x_1\|;$$

для ЭС-2

$$0,0168 \|x_2\| \leq v_2(x_2) \leq 1,4695 \|x_2\|,$$

$$\dot{v}_2(x_2) \leq -29,7852 \|x_2\|; \quad \|\text{grad}_{x_2} v_2(x_2)\| \leq 128,6328 \|x_2\|;$$

для ЭС-3

$$0,0197 \|x_3\| \leq v_3(x_3) \leq 1,4701 \|x_3\|,$$

$$\dot{v}_3(x_3) \leq -25,3187 \|x_3\|; \quad \|\text{grad}_{x_3} v_3(x_3)\| \leq 109,4275 \|x_3\|.$$

Получены элементы агрегированной матрицы

$$W = \begin{bmatrix} -0,2313 & 383587,2441 & 0 \\ 383942,7791 & -0,2316 & 766346,5191 \\ 0 & 766861,0007 & -0,2314 \end{bmatrix}.$$

Условия устойчивости Севастьянова – Котелянского имеют вид

$$(-1)^1 \det|w_{11}| = 0,2313 > 0,$$

$$\begin{aligned} & (-1)^2 \det \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} -0,2313 & 383587,2441 \\ 383942,7791 & -0,2316 \end{vmatrix} \\ & = -1,4728e + 11 < 0; \\ & (-1)^3 \det|W| = 1,6999e + 11 > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условия Севастьянова – Котелянского **не выполнены**, поэтому ЭЭО из трех ЭС с двумя линиями является **неустойчивым**.

Для наглядности построим переходные процессы для каждой координаты системы в каждом ЭС. На графиках показаны векторы состояния в каждом ЭС (см. Рисунки 2–4).

Из графиков видно, что 4 параметра ω, p, q, σ вектора состояния асимптотически к начальному равновесию, первый параметр φ вектора состояния асимптотически к значению 0,3. Интуитивно видно, что система устойчива в состоянии, отличном от начального равновесия.

Связи между ЭС представлены параметром φ . Из графиков и агрегированной матрицы видно, что значения недиагональных матриц гораздо больше, чем значения диагональ-

ных матриц ($A_{ij} \gg A_{ii}$). Это означает, что влияние связей на устойчивость системы довольно сильно.

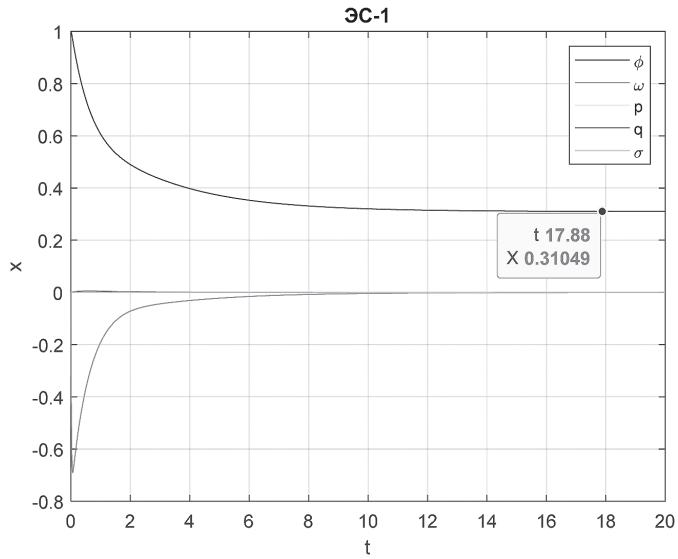


Рисунок 2. Переходные процессы для ЭС-1

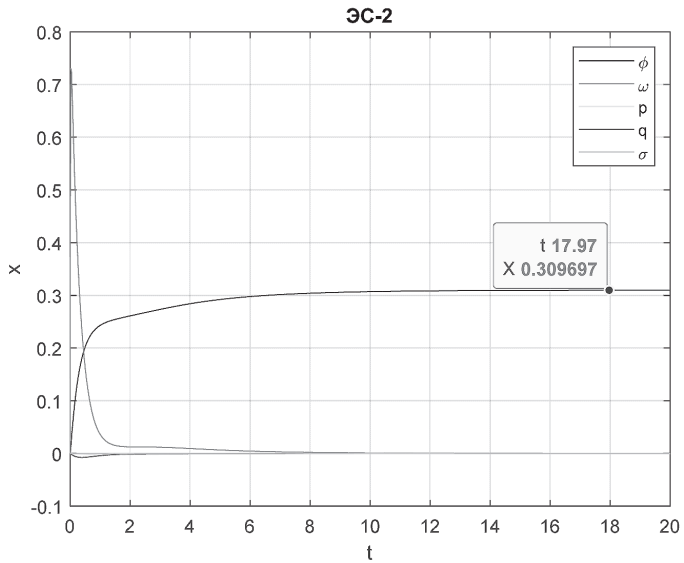


Рисунок 3. Переходные процессы для ЭС-2

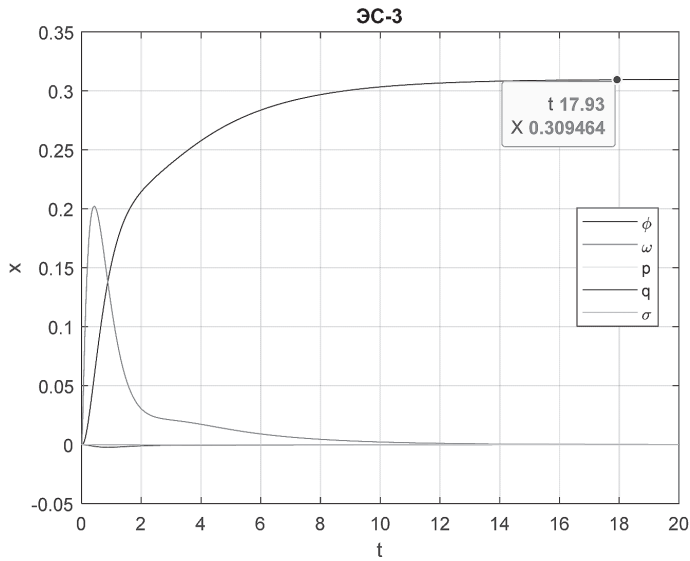


Рисунок 4. Переходные процессы для ЭС-3

Заключение

Алгоритмы поддерживают вычисление векторной функции Ляпунова и построение системы сравнения для непрерывных и дискретных объектов сложных динамических систем. Это основа для оценки устойчивости сложной системы и влияния линейных связей на устойчивость системы.

Литература

1. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 373 с.
2. Шильяк Д.Д. Децентрализованное управление сложными системами. М.: Мир, 1994. 576 с.
3. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. 352 с.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. Козлов В.Н. Управление энергетическими системами и объединениями. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского политехнического университета, 2008. 350 с.
6. Козлов В.Н., Курпьянов В.Е. Вычислительные методы синтеза систем автоматического управления. Ленинград: Издательство ЛГУ им. А.А. Жданова, 1989. 220 с.
7. Козлов В.Н. Системный анализ, оптимизация и принятие решений: учебное пособие. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского политехнического университета, 2011. 244 с.
8. Ефремов А.А., Козлов В.Н., Каракчиева В.В. Анализ устойчивости динамических систем на основе векторных функций Ляпунова // Системный анализ в проектировании и управлении: XXIII Международная научно-практическая конференция: сборник научных трудов. Часть 2. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского политехнического университета, 2020. С. 23–37.
9. Шашихин В.Н., Будник С.В. Синтез двухуровневого стабилизирующего управления системами с параметрическими возмущениями // Системный анализ в проектировании и управлении: сборник научных трудов XXIV Международной научно-практической конференции. Часть 2. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского политехнического университета, 2020.

10. Morteza A.A., Hamed K., Farzad H., Mahdi B. (2020) Decentralized switched model-based predictive control for distributed large-scale systems with topology switching. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. Vol. 38, November 2020.
11. Muhammad Umar B. Niazi, Diego Deplano, Carlos Canudas-de-Wit, and Alain Y. Kibangou (2020) Scale-Free Estimation of the Average State in Large-Scale Systems. *IEEE Control Systems letters*. Vol.4., No.1., Pp. 211–216.
12. James Anderson, John C. Doyle, Steven H. Low, Nikolai Matni (2019) System level synthesis. *Annual Reviews in Control*, 2019, Vol. 47, Pp. 364–393.

Literature

1. Matrosov V.M. (2001) *Metod vektornykh funktsij Ljapunova: analiz dinamicheskikh svojstv nelinejnykh sistem* [Lyapunov vector function method: analysis of dynamic properties of nonlinear systems]. Moscow: Fizmatlit Publishing, 373 p. (in Russian).
2. Shilyak D.D. (1994) *Decentralizovannoe upravlenie slozhnymi sistemami* [Decentralized management of complex systems]. Moscow: Mir Publishing, 576 p. (in Russian).
3. Voronov A.A. (1985) *Vvedenie v dinamiku slozhnykh upravlyaemykh sistem* [Introduction to the dynamics of complex controlled systems]. Moscow: Nauka Publishing, 352 p. (in Russian).
4. Krasovskiy N.N. (1968) *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Motion Control Theory]. Moscow, Nauka Publishing, 476 p. (in Russian).
5. Kozlov V.N. (2008) *Upravlenie jenergeticheskimi sistemami i ob#edinenijami* [Management of energy systems and associations]. St. Petersburg: St. Petersburg Polytechnic University Publishing House, 350 p. (in Russian).
6. Kozlov V.N., Kupriyanov V.E. (1989) *Vychislitel'nye metody sinteza sistem avtomaticheskogo upravlenija* [Computational methods for the synthesis of automatic control systems. Leningrad: Publishing House of Leningrad State University. A.A. Zhdanov, 220 p. (in Russian).
7. Kozlov V.N. (2011) *Sistemnyj analiz, optimizacija i prinjatie reshenij: uchebnoe posobie* [System analysis, optimization and decision making: a tutorial]. St. Petersburg: St. Petersburg Polytechnic University Publishing House, 244 p. (in Russian).
8. Efremov A.A., Kozlov V.N., Karakchieva V.V. (2020) *Analiz ustojchivosti dinamicheskikh sistem na osnove vektornykh funktsij Ljapunova* [Stability Analysis of Dynamic Systems Based on Lyapunov Vector Functions]. *System Analysis in Design and Control: XXIII International Scientific and Practical Conference: Collection of Scientific Papers. Part 2*. St. Petersburg: St. Petersburg Polytechnic University Publishing House, Pp. 23–37 (in Russian).
9. Shashikhin V.N., Budnik S.V. (2020) *Sintez dvuhurovneвого stabilizirujushhego upravlenija sistemami s parametricheskimi vozmushhenijami* [Synthesis of two-level stabilizing control of systems with parametric disturbances]. *System analysis in design and control: collection of scientific papers of the XXIV International Scientific and Practical Conference. Part 2*. St. Petersburg: St. Petersburg Polytechnic University Publishing House, 2020 (in Russian).
10. Morteza A.A., Hamed K., Farzad H., Mahdi B. (2020) Decentralized switched model-based predictive control for distributed large-scale systems with topology switching. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*. Vol. 38, November 2020.
11. Muhammad Umar B. Niazi, Diego Deplano, Carlos Canudas-de-Wit, and Alain Y. Kibangou (2020) Scale-Free Estimation of the Average State in Large-Scale Systems. *IEEE Control Systems Letters*, Vol. 4, No. 1, Pp. 211–216.
12. James Anderson, John C. Doyle, Steven H. Low, Nikolai Matni (2019) System level synthesis. *Annual Reviews in Control*, Vol. 47, Pp. 364–393.