

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В.А. Минаев¹

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

В статье рассматривается модель формирования простых и составных чисел в интервале n^2 и $(n + 1)^2$. Доказывается гипотеза Лежандра (третья проблема Ландау), гипотеза Брокарда и решается вторая проблема Ландау о простых числах-«близнецах».

Ключевые слова: простые числа, проблемы Ландау.

V.A. Minaev

INTERVAL ESTIMATION OF PRIME NUMBERS DISTRIBUTION

In article the model of prime and compound numbers formation in an interval n^2 and $(n + 1)^2$ is considered. The hypothesis of Legendre (Landau third problem), the hypothesis of Brokard are proved and the second problem of Landau about prime numbers- “twins” is solved.

Keywords: prime numbers, Landau problems.

В списке проблем, перечисленных Эдмундом Ландау – известным немецким математиком – в 1914 году на Пятом Международном математическом конгрессе, значится третья проблема Ландау (гипотеза Лежандра). Эта гипотеза, утверждающая, что между n^2 и $(n + 1)^2$, где n – натуральное число, всегда находится простое число, до сих пор не была доказана.

Докажем ее, опираясь на закономерности образования простых и составных чисел, принадлежащих множествам $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, которые приведены в работе [1].

Итак, известно [1], что во множествах $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ содержатся все простые числа, кроме 2 и 3. В зависимости от того, в какое из множеств $\{6k + 1\}$ или $\{6k - 1\}$ входит простое число, будем называть его минус-простым числом (МПЧ) или плюс-простым числом (ППЧ). Помимо простых чисел в этих же множествах содержатся и составные числа, которые, соответственно, назовем минус-составные (МСЧ) и плюс-составные числа (ПСЧ).

Таким образом, множество простых чисел есть объединение:

- вычитания из множества $\{6k + 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ множества плюс-составных чисел;

¹ Доктор технических наук, профессор, проректор НОУ ВПО «Российский новый университет».

² Во всех дальнейших соотношениях (где это специально не оговорено), описывающих количество парных, троичных, простых и составных чисел на том или ином интервале, частное от деления двух чисел принимается за целое число.

- вычитания из множества $\{6k - 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ множества минус-составных чисел;
- двухэлементного множества $\{2; 3\}$.

1. Доказательство гипотезы Лежандра (третья проблема Ландау)

На любом интервале $(0, x)$ находится $\frac{x}{2}$ парных чисел $(2, 4, 6, \dots)$, $\frac{x}{6}$ троичных чисел¹ $(3, 9, 15, \dots)$. Отметим, что числа 2, 3, относясь по определению к простым числам, одновременно являются первыми в последовательностях парных и троичных чисел. Все остальные числа, что нетрудно показать, относятся к множествам $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, которые содержат простые $\pi(x)$, а также составные $c(x)$ числа.

Отсюда имеем следующее соотношение:

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{6} + \pi(x) + c(x), \quad (1.1)$$

где x – количество натуральных чисел от 0 до x или

$$\frac{x}{3} = \pi(x) + c(x). \quad (1.2)$$

Обозначим через $\pi_1 = \pi(n^2)$ и $\pi_2 = \pi((n+1)^2)$ – число простых чисел на интервалах $(0, n^2)$ и $(0, (n+1)^2)$ – соответственно. Кроме того, обозначим $c_1 = c(n^2)$ и $c_2 = c((n+1)^2)$ – число составных чисел из множеств $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ на тех же интервалах.

Применительно к интервалу $(0, n^2)$ соотношение (1.2) приобретет вид:

$$\frac{n^2}{3} = \pi(n^2) + c(n^2) = \pi_1 + c_1. \quad (1.3)$$

Соответственно на интервале $(0, (n+1)^2)$ соотношение (1.2) имеет вид:

$$\frac{(n+1)^2}{3} = \pi_2 + c_2. \quad (1.4)$$

Вычтем из соотношения (1.4) соотношение (1.3):

$$\frac{(n+1)^2}{3} - \frac{n^2}{3} = \pi_2 - \pi_1 + c_2 - c_1. \quad (1.5)$$

Отсюда имеем:

$$\frac{2n+1}{3} = \Delta\pi + \Delta c, \quad (1.6)$$

где $\Delta\pi = \pi_2 - \pi_1$; $\Delta c = c_2 - c_1$.

Очевидно, что третья проблема Ландау будет решена, если доказать, что для любого n

$$\Delta\pi > 0, \quad (1.7)$$

или

$$\frac{2n+1}{3} - \Delta c > 0, \quad (1.8)$$

иначе

$$\frac{2n+1}{3} + c_1 - c_2 > 0. \quad (1.9)$$

В работе [1] показано, что составные числа с избыточной для деления на 6 единицей (ПСЧ – плюс-составные числа, данный термин введен в работе [2]) образуются с помощью соотношений:

$$C_{p_i^-}^+ = p_i^- \cdot p_i^- + p_i^- \cdot 6m; \quad (1.10)$$

$$C_{p_i^+}^+ = p_i^+ \cdot p_i^+ + p_i^+ \cdot 6m;$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots, i = 1, 2, 3, \dots. \quad (1.11)$$

Примеры ПСЧ, образованных от простых чисел 5, 7, 11, 13:

$$\{25; 55; 85; \dots\}$$

$$\{49; 91; 133; \dots\}$$

$$\{121; 187; 253; \dots\}$$

$$\{169; 247; 325; \dots\}.$$

В (1.10) и (1.11) введены следующие обозначения:

p_i^- , $i = 1, 2, 3, \dots$ – простое число из множества $\{6k-1\}$; $k = 1, 2, 3, \dots$ с недостающей единицей для деления нацело на 6 (МПЧ – минус-простое число);

p_i^+ , $i = 1, 2, 3, \dots$ – простое число из множества $\{6k+1\}$; $k = 1, 2, 3, \dots$ с избыточной единицей для деления нацело на 6 (ППЧ – плюс-простое число).

Соответственно $C_{p_i^-}^+$ обозначает множество составных чисел, образуемое с помощью первого уравнения (1.10) и относящееся к множеству ПСЧ. Множество $C_{p_i^+}^+$, образуемое с помощью уравнения (1.11), также относится к множеству ПСЧ.

Нетрудно видеть из (1.10), что первое МПЧ (индекс $i = 1$) образует на интервале $(0, n^2)$

число составных чисел из множества $\{6k+1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, равное

$$q_1^+ = \left[\frac{n^2 - p_1^- \cdot p_1^-}{6p_1^-} \right]^1 + 1. \quad (1.12)$$

Далее

$$q_2^+ = \left[\frac{n^2 - p_2^- \cdot p_2^-}{6p_2^-} \right] + 1; \quad (1.13)$$

...

$$q_{Q_1}^+ = \left[\frac{n^2 - p_{Q_1}^- \cdot p_{Q_1}^-}{6p_{Q_1}^-} \right] + 1, \quad (1.14)$$

где $p_{Q_1}^-$ – максимальное из МПЧ на интервале $(0, n^2)$, образующее ПСЧ на этом же интервале.

Добавочная единица образуется в (1.12) – (1.14) за счет первого составного числа, равного квадрату МПЧ.

Складывая (1.12) – (1.14), имеем:

$$Q_1^+ = \sum_{i=1}^{Q_1} \left(\left[\frac{n^2 - p_i^- \cdot p_i^-}{6p_i^-} \right] + 1 \right) = \sum_{i=1}^{Q_1} q_i^+; \\ i = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.15)$$

где Q_1 – индекс максимального МПЧ, образующего ПСЧ на интервале $(0, n^2)$ с помощью уравнения (1.10).

Аналогично ППЧ (простые числа с избыточной единицей) образуют на том же интервале $(0, n^2)$ следующее количество ПСЧ:

$$Q_2^+ = \sum_{i=1}^{Q_2} \left(\left[\frac{n^2 - p_i^+ \cdot p_i^+}{6p_i^+} \right] + 1 \right); i = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.16)$$

где Q_2 – индекс максимального ППЧ, образующего ПСЧ на интервале $(0, n^2)$ с помощью уравнения (1.11).

Составные числа из множества $\{6k-1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ с недостающей единицей для деления на шесть (МСЧ) нацело, образуются следующим образом от МПЧ и ППЧ [1]:

$$C_{p_i^-}^- = p_i^- \cdot p_i^+ + p_i^- \cdot 6m; \quad (1.17)$$

$$C_{p_i^+}^- = p_i^+ \cdot p_i^- + p_i^+ \cdot 6m; \quad (1.18)$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots, i = 1, 2, 3, \dots.$$

Примеры МСЧ, образованных от простых чисел 5 и 7; 7 и 11; 11 и 13; 13 и 17:

$$\{35; 65; 95; \dots\}$$

$$\{77; 119; 161; \dots\}$$

$$\{143; 209; 275; \dots\}$$

$$\{221; 299; 377; \dots\}$$

Соответственно:

$$q_1^- = \left[\frac{n^2 - p_1^- \cdot p_1^+}{6p_1^-} \right] + 1,$$

¹ Здесь [] обозначение целой части числа, введенное Гауссом.

$$q_2^- = \left[\frac{n^2 - p_2^- \cdot p_2^+}{6p_2^-} \right] + 1,$$

$$\dots$$

$$q_{Q_3}^- = \left[\frac{n^2 - p_{Q_3}^- \cdot p_{Q_3}^+}{6p_{Q_3}^-} \right] + 1. \quad (1.19)$$

Тогда аналогично выражениям (1.15) и (1.16) имеем:

$$Q_3^- = \sum_{i=1}^{Q_3} \left(\left[\frac{n^2 - p_i^- \cdot p_i^+}{6p_i^-} \right] + 1 \right) = \sum_{i=1}^{Q_3} q_i^-; \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.20)$$

где Q_3 – индекс максимального МПЧ, образующего МСЧ на интервале $(0, n^2)$ с помощью соотношения (1.17).

Наконец, для механизма образования МСЧ, описанного уравнением (1.18), имеем:

$$Q_4^- = \sum_{i=1}^{Q_4} \left(\left[\frac{n^2 - p_i^+ \cdot p_i^-}{6p_i^+} \right] + 1 \right); \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.21)$$

где Q_4 – индекс максимального ППЧ, образующего МСЧ на интервале $(0, n^2)$ с помощью соотношения (1.18).

Таким образом, общее количество составных чисел вида $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, образованных на интервале $(0, n^2)$ равно:

$$c_1 = Q_1^+ + Q_2^+ + Q_3^- + Q_4^-. \quad (1.22)$$

Сложим уравнения (1.15), (1.16), (1.20), (1.21):

$$c_1 = \sum_{i=1}^{Q_1} \left(\left[\frac{n^2 - p_i^- \cdot p_i^+}{6p_i^-} \right] + 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Q_2} \left(\left[\frac{n^2 - p_i^+ \cdot p_i^+}{6p_i^+} \right] + 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Q_3} \left(\left[\frac{n^2 - p_i^- \cdot p_i^+}{6p_i^-} \right] + 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Q_4} \left(\left[\frac{n^2 - p_i^+ \cdot p_i^-}{6p_i^+} \right] + 1 \right); \quad i = 1, 2, 3, \dots. \quad (1.23)$$

Аналогичным образом находим выражение для c_2 :

$$c_2 = \sum_{i=1}^{Q_1} \left(\left[\frac{n^2 + 2n + 1 - p_i^- \cdot p_i^-}{6p_i^-} \right] + 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Q_2} \left(\left[\frac{n^2 + 2n + 1 - p_i^+ \cdot p_i^+}{6p_i^+} \right] + 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Q_3} \left(\left[\frac{n^2 + 2n + 1 - p_i^- \cdot p_i^+}{6p_i^-} \right] + 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Q_4} \left(\left[\frac{n^2 + 2n + 1 - p_i^+ \cdot p_i^-}{6p_i^+} \right] + 1 \right); \quad i = 1, 2, 3, \dots. \quad (1.24)$$

где Q_5, Q_6, Q_7 и Q_8 – максимальные значения ин-

декса простых чисел МПЧ и ППЧ, принадлежащих интервалу $(0, (n+1)^2)$ и с помощью соотношений (1.17) и (1.18) образующих на нем же множества МСЧ.

Так как интервал $(0, n^2)$ содержится в интервале $(0, (n+1)^2)$:

$$c_2 = c_1 + \Delta c,$$

где Δc , как определено ранее, количество составных чисел вида $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ на интервале $(n^2, (n+1)^2)$.

Легко показать, что как на интервале $(0, n^2)$, так и на интервале $(0, (n+1)^2)$ составные числа, принадлежащие множествам $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, образуются за счет одних и тех же простых чисел (МПЧ и ППЧ), относящихся к интервалу $(0, n^2)$.

На самом деле, наибольшее простое число, образующее составное на интервале $(0, n^2)$, должно быть не более n , так как первое составное число вида $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ не должно превышать n^2 , находясь в арифметических прогрессиях (1.10), (1.11) на верхней границе данного интервала. Следующее число $n+1$, введенное в квадрат, находится на верхней границе интервала $(n^2, (n+1)^2)$. Таким образом, внутри интервала $(n^2, (n+1)^2)$ не попадают составные числа вида $\{6k \pm 1\}$, образованные простыми числами, превышающими n .

При этом учитывается, что разница между соседними простыми числами – не менее двух (для простых чисел-«близнецовых»). А $(n+2)^2$ уже находится за верхней границей интервала $(0, (n+1)^2)$. Из приведенных рассуждений очевидно, что $Q_1 = Q_5$; $Q_2 = Q_6$; $Q_3 = Q_7$; $Q_4 = Q_8$.

Найдем разность (1.24) и (1.23):

$$\Delta c = c_2 - c_1.$$

Исходя из (1.8), очевидно, что с увеличением оценочного значения Δc в результате различных допущений окончательный положительный вывод о доказательстве гипотезы Лежандра усиливается. Этим обстоятельством мы воспользуемся в процессе решения проблемы.

Итак, вычитая из (1.24) соотношение (1.23), имеем:

$$\Delta c = \sum_{i=1}^{Q_1} \left(\left[\frac{n^2 + 2n + 1 - p_i^- \cdot p_i^-}{6p_i^-} \right] + 1 - \left[\frac{n^2 - p_i^- \cdot p_i^-}{6p_i^-} \right] - 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Q_2} \left(\left[\frac{n^2 + 2n + 1 - p_i^+ \cdot p_i^+}{6p_i^+} \right] + 1 - \left[\frac{n^2 - p_i^+ \cdot p_i^+}{6p_i^+} \right] - 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Q_3} \left(\left[\frac{n^2 + 2n + 1 - p_i^- \cdot p_i^+}{6p_i^-} \right] + 1 - \left[\frac{n^2 - p_i^- \cdot p_i^+}{6p_i^-} \right] - 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{Q_4} \left(\left[\frac{n^2 + 2n + 1 - p_i^+ \cdot p_i^-}{6p_i^+} \right] + 1 - \left[\frac{n^2 - p_i^+ \cdot p_i^-}{6p_i^+} \right] - 1 \right). \quad (1.25)$$

С учетом того, что разность целой части от двух действительных положительных чисел x_2 и x_1 при $x_2 \geq x_1$ больше или равна целой части от разности этих же чисел:

$$[x_2] - [x_1] \leq [x_2 - x_1], \quad (1.26)$$

из (1.25) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta c \leq \Delta c_1 &= \sum_{i=1}^{\varrho_1} \left[\frac{2n+1}{6p_i^-} \right] + \sum_{i=1}^{\varrho_2} \left[\frac{2n+1}{6p_i^+} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^{\varrho_3} \left[\frac{2n+1}{6p_i^-} \right] + \sum_{i=1}^{\varrho_4} \left[\frac{2n+1}{6p_i^+} \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Далее, учитывая, что:

$$[x_1] + [x_2] \leq [x_1 + x_2], \quad (1.28)$$

а также, что $\varrho_3 \leq \varrho_1$ и $\varrho_4 \leq \varrho_2$, так как $p_i^- < p_i^+$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta c &\leq \Delta c_1 \leq \Delta c_2 = \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^{\varrho_1} \frac{2n+1}{6p_i^-} + \sum_{i=1}^{\varrho_2} \frac{2n+1}{6p_i^+} \right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Для удобства доказательства далее будем рассматривать множества простых чисел МПЧ и ППЧ как единое множество:

$$\{p_i\} = \{p_i^-\} + \{p_i^+\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots. \quad (1.30)$$

Определим $M = Q_1 + Q_2$ как индекс максимального простого числа из объединенного множества (1.30), которое образует составные числа вида $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ на интервале $(0, (n+1)^2)$.

Тогда (1.29) преобразуется к виду:

$$\Delta c_2 = \frac{2n+1}{3} \sum_{i=1}^M \frac{1}{p_i}. \quad (1.31)$$

Введем обозначение:

$$z(M) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{p_i}. \quad (1.32)$$

Важно отметить, что последовательности МСЧ и ПСЧ, образуемые с помощью соотношений (1.10) – (1.11) и (1.17) – (1.18), периодически «пересекаются», т.е. имеют одинаковые элементы.

Покажем это, например приравняв (1.17) и (1.18):

$$\begin{aligned} p_i^- \cdot p_i^+ + p_i^- \cdot 6k &= p_i^+ \cdot p_i^- + p_i^+ \cdot 6l; \\ i = 1, 2, 3, \dots; k, l &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.33)$$

Отсюда:

$$p_i^- k = p_i^+ l, \quad (1.34)$$

т.е. совпадение элементов последовательностей (1.17) и (1.18) происходит при $k = p_i^+$ и $l = p_i^-$.

Таким образом, период равенства элементов последовательностей (1.17) и (1.18) равен $6p_i^- \cdot p_i^+$.

Из-за совпадения ряда элементов последовательностей именно на количество «пересекающихся» составных чисел вида $\{6m-1\}$; $m = 1, 2, 3, \dots$ уменьшается общее количество составных чисел на интервале $(n^2, (n+1)^2)$.

Отметим, что эффект взаимосвязи последовательностей, образующих МСЧ и ПСЧ, впервые описан в настоящей статье. Вследствие данного эффекта несколько корректируется представление о «древе жизни», иллюстрирующим в работе [1] структуру натурального ряда. Согласно данному эффекту, некоторые листья – составные числа – через определенный период должны одновременно принадлежать разным ветвям «дерева».

Рассмотрим все возможные «пересечения» последовательностей, формирующих составные числа на интервале $(n^2, (n+1)^2)$.

«Пересечения» ПСЧ, формирующих с помощью соотношений (1.10) – (1.11), определяются с помощью уравнений:

$$\begin{aligned} p_i^- \cdot p_i^- + p_i^- \cdot 6m &= p_j^- \cdot p_j^- + p_j^- \cdot 6l \\ p_i^+ \cdot p_i^+ + p_i^+ \cdot 6m &= p_j^+ \cdot p_j^+ + p_j^+ \cdot 6l \\ p_i^+ \cdot p_i^+ + p_i^+ \cdot 6m &= p_j^- \cdot p_j^- + p_j^- \cdot 6l \\ p_i^- \cdot p_i^- + p_i^- \cdot 6m &= p_j^+ \cdot p_j^+ + p_j^+ \cdot 6l, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где $i, j = 1, 2, 3, \dots M; m, l = 0, 1, 2, \dots$.

Вторая система уравнений, определяющих «пересечения» МСЧ, записывается в виде:

$$\begin{aligned} p_i^- \cdot p_i^+ + p_i^- \cdot 6m &= p_j^- \cdot p_j^+ + p_j^- \cdot 6l \\ p_i^+ \cdot p_i^- + p_i^+ \cdot 6m &= p_j^+ \cdot p_j^- + p_j^+ \cdot 6l \\ p_i^- \cdot p_i^+ + p_i^- \cdot 6m &= p_j^+ \cdot p_j^- + p_j^+ \cdot 6l \\ p_i^+ \cdot p_i^- + p_i^+ \cdot 6m &= p_j^- \cdot p_j^+ + p_j^- \cdot 6l, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где $i, j = 1, 2, 3, \dots M; m, l = 0, 1, 2, \dots$.

Приведем множества МПЧ и ППЧ к единой нумерации:

$$p_1 = 5, p_2 = 7, p_3 = 11, p_4 = 13 \text{ и т.д.}$$

Нетрудно показать, что для общего случая период, через который в последовательностях (1.35) – (1.36) возникают «пересечения», равен:

$$T(p_i, p_j) = 6p_i p_j; \quad i, j = 1, 2, \dots M. \quad (1.37)$$

Общее количество составных чисел, по аналогии с (1.15), (1.16), (1.20), (1.21) совпадающих по своему значению в двух разных последовательностях на интервалах $(0, n^2)$ и $(0, (n+1)^2)$, равно:

$$q_1 = \sum_{i=1}^M \left\{ \left[\frac{(n+1)^2 - p_i \cdot p_j}{6p_{ij}} \right] + 1 \right\}; \quad (1.38)$$

$$q_2 = \sum_{i=1}^M \left\{ \left[\frac{n^2 - p_i \cdot p_j}{6p_{ij}} \right] + 1 \right\}; \quad (1.39)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots M.$$

Вычитая (1.39) из (1.38), получаем общее количество «пересекающихся» составных чисел на интервале $(n^2, (n+1)^2)$:

$$\Delta q = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(2n+1)}{6} z^2 = \frac{2n+1}{6} z^2, \quad (1.40)$$

где

$$z^2 = \sum_{i=1}^M \frac{1}{p_i} \cdot \sum_{j=1}^M \frac{1}{p_j}; \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (1.41)$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ введен для учета того, что необходимо рассмотреть только половину «пересечений», которая является дублем составных чисел вида $\{6k \pm 1\}$; $m = 1, 2, 3, \dots$ на интервале $(n^2, (n+1)^2)$.

Кроме того, из (1.41) вычтем «самопересечения» типа $\frac{1}{p_i^2}$; $i = 1, 2, \dots, M$.

В результате имеем

$$\Delta \pi(n, p) = \frac{2n+1}{3} \left[1 - z + z^2 - \frac{\rho}{2} \right], \quad (1.42)$$

где

$$\rho = \sum_{i=1}^M \frac{1}{p_i^2} \quad (1.43)$$

или

$$\rho = \zeta_p(2) - \frac{1}{4} - \frac{1}{9}, \quad (1.44)$$

где $\zeta_p(2)$ – дзета-функция Римана на множестве простых чисел, равная:

$$\zeta_p(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \sum_{i=1}^M \frac{1}{p_i^2}.$$

Известно, что

$$\zeta_p(2) \rightarrow 0,453\dots \quad (1.45)$$

Соответственно, при $M \rightarrow \infty$

$$\rho \rightarrow 0,0919. \quad (1.46)$$

Преобразуем (1.42) к виду:

$$\Delta \pi(n, z) = \frac{2n+1}{6} \left[(1-z)^2 + (1-\rho) \right]. \quad (1.47)$$

Очевидно, что при любых z и n $\Delta \pi(n, z) > 0$.

Таким образом, теорема Ландау доказана, или гипотеза Лежандра подтверждена.

2. Некоторые следствия доказательства теоремы Ландау

2.1. Простое доказательство гипотезы Берtrand'a

В 1845 году французским математиком Ж. Берtrandом была выдвинута гипотеза, названная впоследствии постулатом, о том, что для любого натурального $n > 1$ найдется простое число в интервале $(n, 2n)$. В 1845 году эта гипотеза доказана русским математиком П.Л. Чебышёвым в его знаменитой теореме. Индийский матема-

тик С. Раманаджан в 1920 году нашел более простое доказательство гипотезы Берtrand'a, а венгр П. Эрдёш – в 1932 году – еще более простое.

Используя доказательство теоремы Ландау, можно весьма просто обосновать справедливость постулата Берtrand'a.

Пусть

$$m = \sqrt{n} \text{ и } m+1 = \sqrt{n} + 1. \quad (2.1.1)$$

Тогда

$$(m+1)^2 - m^2 = n + 2\sqrt{n} + 1 - n = 2\sqrt{n} + 1. \quad (2.1.2)$$

Покажем, при каких n справедливо соотношение:

$$2\sqrt{n} + 1 < n, \quad (2.1.3)$$

означающее, что интервал, используемый в постулате, шире и включает интервал между квадратами последовательных чисел натурального ряда в доказанной в настоящей работе теореме Ландау, всегда содержащий простое число.

Из (2.1.3) следует:

$$0 < n^2 - 6n + 1 = (n - 3 + 2\sqrt{2})(n - 3 - 2\sqrt{2}). \quad (2.1.4)$$

Анализ (2.1.4) показывает, что постулат Берtrand'a всегда справедлив при $n > 5$. Дополнительный анализ при $1 < n < 5$ свидетельствует о том, что названный постулат выполняется для всех $n > 1$.

2.2. Доказательство гипотезы Брокарда

Из доказательства гипотезы Лежандра легко выводится утверждение, названное гипотезой Брокарда: между квадратами подряд идущих простых чисел, за исключением первых двух, всегда найдется хотя бы четыре простых числа.

Обозначим $\pi(p_{n+1}^2)$ число простых чисел на интервале $(0, p_{n+1}^2)$ и $\pi(p_n^2)$ – число простых чисел на интервале $(0, p_n^2)$, где p_n и p_{n+1} – подряд идущие простые числа. Тогда гипотеза Брокарда формулируется как:

$$\Delta \pi_B = \pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2) \geq 4. \quad (2.2.1)$$

Пусть $p_n^2 = n^2$.

Докажем (2.2.1) для простых чисел «близнецовых», когда расстояние между подряд идущими простыми числами $p_{n+1} - p_n = 2$ – минимально. В случае, когда соседние простые числа не «близнецы», доказательство очевидно.

Итак, вводя определение Δ_B :

$$\Delta_B = (p_n + 2)^2 - p_n^2 = 4p_n + 4 = 4(n + 1), \quad (2.2.2)$$

имеем

$$\Delta_B = 4n + 4 = 2(\Delta + 1), \quad (2.2.3)$$

т.е. $\Delta = 2n + 1$ включен в интервал Δ_B .

Из (2.2.3) следует, что всегда $\Delta \pi_B > 0$, ибо на большем, чем Δ , интервале, как было показано

при доказательстве теоремы Ландау, всегда есть простое число.

Учитывая, что при $p_n^2 = n^2$ на интервале (p_n^2, p_{n+1}^2) МСЧ и ПСЧ образуются такими же простыми числами, как и на интервале $(n^2, (n+1)^2)$, справедливо следующее соотношение:

$$\Delta_B = \frac{4(n+1)}{6} \left\{ (1-z)^2 + (1-\rho) \right\}. \quad (2.2.4)$$

Покажем, что даже при минимуме выражения в фигурных скобках гипотеза Брокарда подтверждается.

На самом деле минимум $(1-z)^2 = 0$, а минимум $(1-\rho) = 0,908$ достигается при максимуме $\rho = 0,0919$.

Тогда необходимо найти n , при котором выполняется неравенство:

$$\frac{4(n+1)}{6} \cdot 0,908 \geq 4. \quad (2.2.5)$$

Очевидно, что при $n > 6$ неравенство (2.2.5) выполняется всегда.

Легко показать, что и при $n \geq 5$ гипотеза Брокарда справедлива, а небольшое завышение оценок здесь и при подтверждении постулата Бертрана связано с «краевыми эффектами», обусловленными началом формирования простых чисел в натуральном ряду.

2.3. Решение проблемы «простых близнецов»

Используя соотношение (2.2.4), покажем, что число «простых близнецов», т.е. простых чисел, разность между которыми равна 2, бесконечно. Для этого в выражении (2.2.4) вычтем количество простых чисел, равное количество простых чисел вида $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, находившихся на интервале $(n^2, (n+1)^2)$. Тем самым мы учтем все простые числа, стоящие «против» составных чисел, и, таким образом, не являющиеся «близнецами» простых. Здесь необходимо отметить, что «против» составных чисел могут также оказаться и другие составные. Таким образом, вычитая удвоенное количество составных, мы как бы искусственно занижаем количество простых чисел-«близнецов» на интервале $(n^2, (n+1)^2)$ путем учета уже учтенного.

Итак, оценка количества простых чисел-«близнецов» на интервале $(n^2, (n+1)^2)$ записывается в виде:

$$\Delta\pi_B(n, z) \geq \frac{2n+1}{3} [1 - 2z + z^2 - \rho], \quad (2.3.1)$$

$$\Delta\pi_B(n, z) \geq \frac{2n+1}{3} [(1-z)^2 - \rho]. \quad (2.3.2)$$

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ количество простых-«близнецов» $\Delta\pi_B \rightarrow \infty$, несмотря на то, что на коротком интервале $1 - \sqrt{\rho} < z < 1 + \sqrt{\rho}$ выражение в квадратных скобках становится отрицательным по причине упомянутого искусственного занижения.

В результате, мы пришли к выводу о том, что число простых чисел-«близнецов» на интервале $(n^2, (n+1)^2)$ стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, тем самым решив вторую проблему Ландау о том, что число «простых близнецов» бесконечно.

В заключение отметим, что практические расчеты содержания простых чисел, выполненные с использованием полученного соотношения (1.47), показали, что на начальном этапе формирования натурального ряда происходит занижение оценки количества простых чисел на интервалах $(n^2, (n+1)^2)$, а затем – завышение оценки их количества. Накопленные ошибки обусловлены оперированием с нецелочисленными функциями. Однако это свойство не является принципиальным для доказательства гипотезы Лежандра, а также тех следствий, которые вытекают из приведенного доказательства.

Для практических расчетов количества простых чисел в интервале $(n^2, (n+1)^2)$ учтем, что целые числа в выражении (1.27) начинают образовываться со значений $n > 15$ (для минимального простого числа, образуемого во множестве $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, равного 5), а «пересечения» по аналогичной формуле возникают после $n > 75$ (для минимального квадрата простых чисел, образуемых в том же множестве $\{6k \pm 1\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, равного 25). Для этого отбросим соответствующее количество слагаемых в выражениях для z , квадрата z и ρ .

В этом случае приближенная формула приобретает вид

$$\Delta\pi(n, z) = \frac{2n+1}{6} [(1-z)^2 + 0,45]. \quad (2.3.3)$$

На рис. 1 приведен эмпирический график изменения количества простых чисел в интервале $(n^2, (n+1)^2)$ и для сравнения (пунктирная линия) – оценка их количества по формуле (2.3.3).

Таким образом, наблюдается хорошее согласование эмпирических данных и модели (2.3.3). При этом отмечается занижение оцененного количества простых чисел на некотором начальном интервале. Для точного согласования эмпирических и теоретических данных необходимо программно реализовать целочисленный вариант модели (1.47).



Рис. 1. Эмпирический график изменения количества простых чисел в интервале $(n^2, (n+1)^2)$

Литература

1. Минаев, В.А., Хренов, В.П. Фундаментальная закономерность формирования простых чисел и информационная безопасность // Безопасность информационных технологий. – 2008. – № 3. – С. 20–32.
2. Каленикова, Н.А., Минаев, В.А., Хренов, В.П. Улучшение метода Ферма : новый алгоритм факторизации // Безопасность информационных технологий. – 2010. – № 2. – С. 76–79.
3. Merrifield, C.W. The sums of the series of reciprocals of the prime numbers and of their powers. Proc. Roy. Soc. London (1881), vol. 33, p. 4–10.